DM : Un équivalent de l'hypothèse de Riemann.

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Le DM est long. Il est tout à fait envisageable de ne faire que certaines parties en admettant les résultats nécessaires dans les parties précédentes ou de sauter des questions. On pourra utiliser tous les résultats démontrés en TD. N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous êtes complètement bloqué.e ou si vous pensez avoir trouvé une erreur dans le sujet.

Pour un nombre complexe s, on se tiendra à la convention suivante : σ désigne automatiquement la partie réelle de s, et t désigne automatiquement sa partie imaginaire.
On écrira $f(x,\boldsymbol{y}) = O(g(x,\boldsymbol{y}))$ uniformément en $\boldsymbol{y}$ pour dire qu'il existe une constante $B > 0$ indépendante de $\boldsymbol{y}$ telle que $|f(x,\boldsymbol{y})| \leqslant Bg(x,\boldsymbol{y})$ pour tout x assez grand. La lettre C dénotera toujours une constante positive réelle qui peut changer d'une ligne à l'autre mais ne dépend d'aucune variable.

Le but de ce DM est de prouver un équivalent élémentaire de l'hypothèse de Riemann, dont l'énoncé est donné ci-dessous (pour la définition précise des zéros non-triviaux, voir question 7). Il donne également une idée des méthodes utilisées en théorie analytique des nombres pour convertir l'information sur des séries de Dirichlet en information sur des fonctions intéressantes en théorie des nombres.

Hypothèse de Riemann.
Les zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$.

1 Transformées de Mellin inverse de séries de Dirichlet.

Dans cette première partie, on prouve une version quantitative de la formule de Perron, qui est la formule de la transformée de Mellin inverse pour les séries de Dirichlet.

1. Soit
$$f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$
une série de Dirichlet convergeant absolument pour $\Re(s) > \sigma_a > 0$. Démontrer que pour $\Re(s) > \sigma_a$, on a
$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} = s\int_0^\infty x^{-s}A(x)\frac{dx}{x}$$
où $A(x) = \sum_{n<x} a_n$.

2. (a) Soient $y > 1$, $T > 0$, $c > 0$. Démontrer que
$$\int_{c-iT}^{c+iT} y^s\frac{ds}{s} = 2i\pi - \int_{-\infty-iT}^{c-iT} y^s\frac{ds}{s} - \int_{c+iT}^{-\infty+iT} y^s\frac{ds}{s}.$$
(b) Démontrer à l'aide d'une IPP que
$$\int_{c+iT}^{-\infty+iT} y^s\frac{ds}{s} = O\left(\frac{y^c}{T\log(y)}\right)$$
uniformément en y, et de même pour $\int_{-\infty-iT}^{c-iT} y^s\frac{ds}{s}$.
(c) Soit $0 < y < 1$, démontrer que
$$\int_{c-iT}^{c+iT} y^s\frac{ds}{s} = \int_{+\infty-iT}^{c-iT} y^s\frac{ds}{s} - \int_{c+iT}^{+\infty+iT} y^s\frac{ds}{s}$$

et que

$$\int_{+\infty\pm iT}^{c\pm iT} y^s \frac{ds}{s} = O\left(\frac{y^c}{T\log(1/y)}\right)$$

uniformément en y.

On fait les suppositions suivantes sur f : on suppose que $\sigma_a = 1$, que $a_n = O(F(n))$, où F est croissante. On étend F aux non-entiers par $F(x) = F(\lfloor x \rfloor)$. On suppose finalement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma} = O\left(\frac{1}{(\sigma-1)^\alpha}\right).$$

3. Démontrer que si $c > 1$ et x n'est pas un nombre entier, alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT} f(s)x^s \frac{ds}{s} = A(x) + O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{n^c|\log(x/n)|}\right)$$

uniformément en x.

4. Démontrer que pour $1 \leqslant k < x$, on a

$$\log\left(\frac{\lceil x\rceil + k}{x}\right) \geqslant \frac{\log(2)k}{x}$$

et pour $1 \leqslant k < \frac{x}{2}$

$$\log\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor - k}\right) \geqslant \frac{\log(2)k}{x}.$$

5. Démontrer que pour x non-entier, on a

$$\sum_{x/2\leqslant n\leqslant 2x} \frac{|a_n|}{n^c|\log(x/n)|} = O(F(2x)x^{1-c}\log(x)) + O\left(\frac{F(N+1)x^{1-c}}{|N-x|}\right) + O\left(\frac{F(N+1)x^{1-c}}{|N+1-x|}\right)$$

où $N = \lfloor x \rfloor$.

6. En déduire finalement que

$$A(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT} f(s)x^s\frac{ds}{s} + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{F(2x)x\log(x)}{T}\right) + O\left(\frac{F(x+1)x}{T\min(\{x\}, 1-\{x\})}\right)$$

uniformément en x, où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ est la partie fractionnaire de x. En particulier, à x fixé, on a la formule de Perron :

$$A(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT} f(s)x^s\frac{ds}{s}.$$

2 L'inverse de la fonction ζ.

On pose, pour n entier, $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n, et la fonction de Möbius

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & \text{si } n \text{ est sans facteur carré} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle l'équation fonctionnelle de la fonction zêta, valable pour tout s :

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

On rappelle également le produit eulérien de ζ : pour $\Re(s) > 1$, on a

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

7. Démontrer que les zéros de la fonction ζ sont soit des entiers négatifs pairs, soit de partie réelle comprise entre 0 et 1. Ce sont ces derniers zéros qui sont dits non-triviaux, et ceux dont parle l'hypothèse de Riemann.

8. Démontrer l'égalité, valable pour $\Re(s) > 1$:
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$
On pourra au choix calculer explicitement la convolution arithmétique $\mu * \mathbf{1}$ ou utiliser les résultats de l'exercice 7 du TD 7.

9. A l'aide de la formule de sommation par parties, démontrer que
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} M(n) \frac{(1+1/n)^s - 1}{(n+1)^s}$$
où $M(x) = \sum_{k \leqslant x} \mu(k)$.

10. En déduire que si $M(x) = O(x^\alpha)$, alors la série donnée pour $1/\zeta(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > \alpha$.

11. Démontrer que dans ce cas, la fonction ζ n'admet aucun zéro de partie réelle $> \alpha$, ni de zéro non-trivial de partie réelle $< 1 - \alpha$

12. En déduire que l'estimation $M(n) = O(n^{\frac{1}{2}+\beta})$ pour tout $\beta > 0$ implique l'hypothèse de Riemann. Les deux parties suivantes sont dédiées à la preuve de la réciproque.

3 Le comportement de $1/\zeta$ pour les grandes parties imaginaires.

Dans cette section et la suivante, on suppose vraie l'hypothèse de Riemann et on va démontrer qu'alors la fonction $M(x)$ vérifie l'estimation $M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\beta})$ pour tout $\beta > 0$. On pourra utiliser les deux résultats suivants, trouvables dans les TD 1 et 4 respectivement.

Théorème. *(Borel-Carathéodory ou lemme de la partie réelle)*
Soit f une fonction analytique dans la boule fermée $B(0, R)$. Pour $r < R$, on note $A(r) = \sup_{|z|=r} \Re f(z)$, $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. On a
$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

Théorème. *(Trois cercles de Hadamard)*
Soit f une fonction analytique définie au voisinage de l'anneau fermé $r \leqslant |z| \leqslant R$. La fonction $\rho \mapsto M(\rho) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|$ est logarithmiquement convexe en $\log(\rho)$, c'est-à-dire que pour $v \in [0, 1]$, on a :
$$M(\rho_1^v \rho_2^{1-v}) \leqslant M(\rho_1)^v M(\rho_2)^{1-v}.$$

13. Démontrer que pour $\Re(s) > 0$, on a
$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n \geqslant 1} \int_0^1 \frac{t}{(t+n)^{s+1}} dt$$
et en déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour $|t|$ assez grand, pour tout $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$,
$$\log |\zeta(s)| < C \log |t|.$$

14. Soit $\delta > 0$. Démontrer que pour $|t|$ assez grand, $\sigma \geqslant \frac{1}{2} + \delta$ on a
$$|\log \zeta(s)| \leqslant \frac{6-4\delta}{\delta} C \log |t| + \frac{6-3\delta}{\delta} |\log \zeta(2+it)|$$
et en déduire que pour $|t|$ assez grand, on a
$$|\log \zeta(s)| \leqslant \frac{C}{\delta} \log |t|.$$

15. Démontrer que

$$\log \zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s}$$

où $\Lambda_1(n)$ est $1/k$ si $n = p^k$ avec p premier et zéro sinon. En déduire que pour $\Re(s) > 1 + \eta$, on a

$$|\log \zeta(s)| \leqslant \frac{C}{\eta}$$

pour une constante $C > 0$.

16. On va maintenant interpoler entre un cercle qui passe à δ de la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$, sur lequel on contrôle relativement mal $\log \zeta$, et un cercle qui passe à η de la droite $\Re(s) = 1$, où on a un meilleur contrôle quand $|t| \to \infty$. On fixe $s = \sigma + it$, et pour $1 < \sigma_1 \leqslant |t|$, et posons :

$$r = \sigma_1 - 1 - \eta,\ \rho = \sigma_1 - \sigma,\ R = \sigma_1 - \frac{1}{2} - \delta$$

et on considère les trois cercles de centre $\sigma_1 + it$ de rayons r, ρ et R. On ajustera les paramètres après avoir fait les premières estimations.

(a) Démontrer qu'on a

$$|\log \zeta(\sigma + it)| \leqslant M(r)^{1-v} M(R)^v$$

où l'on explicitera $v \in [0,1]$ en fonction de δ, η, σ_1.

(b) En déduire que

$$|\log \zeta(\sigma + it)| \leqslant \frac{C}{\eta^{1-v}\delta^v} (\log |t|)^{2-2\sigma+O(\delta)+O(\eta)+O(1/\sigma_1)}.$$

(c) En choisissant astucieusement δ, η et σ_1, démontrer que pour tout $\sigma > 1/2$ fixé, on a

$$|\log \zeta(s)| = O\left(\log\log(t) \log(t)^{2-2\sigma}\right).$$

17. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour $|t|$ assez grand, on a

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \leqslant |t|^\varepsilon.$$

4 Le sens réciproque.

18. Démontrer qu'on a, pour $0 < \delta < \frac{1}{2}$

$$\int_{2-iT}^{2+iT} \frac{x^s}{s\zeta(s)} ds = -\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+\delta+iT} \frac{x^s}{s\zeta(s)} ds - \int_{\frac{1}{2}+\delta+iT}^{\frac{1}{2}+\delta-iT} \frac{x^s}{s\zeta(s)} ds - \int_{\frac{1}{2}+\delta-iT}^{2-iT} \frac{x^s}{s\zeta(s)} ds.$$

19. En déduire que pour $\varepsilon > 0$ fixé, $\delta > 0$ fixé, on a

$$\int_{2-iT}^{2+iT} \frac{x^s}{s\zeta(s)} ds = O\left(x^{\frac{1}{2}+\delta} T^\varepsilon\right) + O\left(x^2 T^{\varepsilon-1}\right).$$

20. En déduire finalement, avec un choix judicieux de T, que pour tout $\beta > 0$ on a

$$M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\beta})$$

si x est un demi-entier, et donc pour tout x.